

Normální formy a úplné normální formy

Normálními formami nazýváme takové formule, které jsou cílevědomě upraveny na určitý standardní tvar.

V transformacích jsme se již naučili, že výrok je možno převádět na výroky ekvivalentní s jinými funktory. Pokud si předem stanovíme, které „jediné“ funktory smíme užít, mluvíme o normálních formách. Jakýkoliv složený výrok lze formalizovaně vyjádřit jako formuli obsahující pouze:

- a) funktory konjunkce, disjunkce a negace,
- b) funktory implikace a negace,
- c) funktor buď Shefferův anebo Peircův.

Příklad. Je-li neslučitelné tvrzení „Lze studovat.“ s tvrzením „Lze jít do divadla.“, pak to znamená „Do divadla nejít.“.

„Lze studovat.“	p
„Lze jít do divadla.“	q
„Nelze jít do divadla.“	$\bar{q}$ (nejít)

Formalizovaně: $p|q \Leftrightarrow \bar{q}$

q

Ad a)

- aa) $p|q \equiv \bar{q}$ dle TE
- ab) $\overline{p \rightarrow q} \equiv \bar{q}$ dle TE
- ac) $p \rightarrow q \equiv \bar{p} \vee q$ dle Z 49
- ad) $p \rightarrow \bar{q}$

Ad b)

- ba) $p|q \equiv \bar{q}$ dle Z 63
- bb) $(p \equiv \bar{q}) \equiv \bar{q}$

Ad c)

- ca) $p|q \equiv \bar{q}$ dle Z 63
- cb) $(p|q)|q$

Důkaz maticí.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	p	q	$\bar{q}$	$p q$	$4 \equiv \bar{q}$	$p \rightarrow \bar{q}$	$p \equiv \bar{q}$	$7 \equiv \bar{q}$	$1 q$	$9 q$
1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
2	0	1	0	1	0	0	1	0	1	0
3	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1
4	1	1	0	0	1	1	0	1	0	1
						Ad a)		Ad b)		Ad c)

Tab. 27

Sloupce 6, 8 a 10 jsou ekvivalentní.

Z uvedeného příkladu vidíme, že existují

- 1) Teoreticky nejpropracovanější a prakticky nejvíce využívané normální formy disjunktivní a konjunktivní. (Vše vyjadřují konjunkcí, disjunkcí a negací.)
- 2) Normální formy implikativní.
- 3) Normální formy, které vyjádří jakýkoli složený výrok jediným funktorem, buď Shefferovým anebo Peircovým. (Kterýkoliv z nich je schopen vyjádřit i negaci.)

Normálním formám implikativním a transformacím na jediný funktor se již věnovat nebudeme a soustředíme se na normální formy disjunktivní a konjunktivní.

Disjunktivní a konjunktivní normální formy (dále DNF a KNF)

Naši dosavadní terminologii rozšíříme o další termíny a pravidla:

Elementární konjunkce

je každá konjunkce navzájem různých výrokových proměnných (argumentů) nebo jejich negací.

Příklady elementárních konjunkcí

$$p \wedge q, p \wedge q \wedge r.$$

Samotnou proměnnou p můžeme chápat jako elementární konjunkci, protože platí $p \approx p \wedge \top$ (viz Z 8).

Elementární disjunkce

je každá disjunkce navzájem různých výrokových proměnných (argumentů) nebo jejich negací.

Příklady elementárních disjunkcí

$$q \vee \bar{r}, p \vee q \vee r \vee \bar{s} \text{ atd.}$$

Samotnou proměnnou můžeme chápat jako elementární disjunkci, protože platí $p \approx p \vee \bar{p}$ (viz Z 9).

Pravidlo o vynechání funktoru konjunkce

V elementárních konjunkcích můžeme nahradit funktor $\wedge$ operátorem pro násobení nebo jej vůbec vynechat.

$$p \wedge q \wedge r \approx p \cdot q \cdot r \approx pqr.$$

Takto upravené konjunkce nedáváme do závorek.

Disjunktivní normální forma

(DNF) dané formule je formule jí ekvivalentní, která je logickým součtem (disjunkcí) elementárních konjunkcí navzájem různých.

Příklad. $pqr \vee \bar{p}r \vee \bar{q}$.

q

Konjunktivní normální forma

(KNF) dané formule je formule jí ekvivalentní, která je konjunkcí elementárních disjunkcí navzájem různých.

Příklad. $(p \vee q \vee \bar{r}) \wedge (\bar{p} \vee r) \wedge \bar{q}$.

q

Protože transformace formulí na DNF nebo KNF provádíme způsobem, který jsme probrali v části „transformace“, přistoupíme bez dalšího k příkladům.

Příklad.

- a) Předpokládejme nějaký složený výrok, který je vyjádřen formulí

$$[(p \approx q) \wedge (\bar{q}|r)] \wedge (q \sqcup \bar{r}).$$

Naším úkolem je najít pro tuto formuli disjunktivní normální formu.

- aa) $[(p \approx q) \wedge (\bar{q}|r)] \wedge (q \sqcup \bar{r})$ dle Z 40
- ab) $[(pq \vee \bar{p}\bar{q}) \wedge (\bar{q}|r)] \wedge (q \sqcup \bar{r})$ dle TE odstraníme $|$, $\sqcup$
- ac) $[(pq \vee \bar{p}\bar{q}) \wedge (q \vee \bar{r})] \wedge \bar{q}r$ dle TE odstraníme $\wedge$

- ad) $\overline{pq \oplus \overline{p\bar{q}} \oplus (q \oplus \bar{r})} \oplus \bar{q}r$ dle De Morgana (dle TE)
- ae) $[(pq \oplus \overline{p\bar{q}}) \oplus \overline{q \oplus \bar{r}}] \oplus \bar{q}r$ opět dle De Morgana
- af) $[(pq \oplus \overline{p\bar{q}}) \oplus \bar{q}r] \oplus \bar{q}r$ dle Z 28
- ag) $(pq\bar{q}r \oplus \overline{p\bar{q}\bar{q}r}) \oplus \bar{q}r$ dle Z 55, Z 8, Z 25
- ah) $0 \oplus \overline{p\bar{q}r} \oplus \bar{q}r$ dle Z 47
substitucí $p|\bar{q}r, q|p$
- ai) $\bar{q}r$ hledaná normální forma.
(Jde o DNF, lze ji vyjádřit $\bar{q}r \oplus \bar{q}r$).

V našem příkladu dokonce díky transformaci na DNF zjišťujeme, že proměnná p nemá na výslednou pravdivostní hodnotu formule vliv. Platí ekvivalence

$$\mathcal{A}(p \approx q) \oplus (\bar{q}|r) \oplus (q \oplus \bar{r}) \approx \bar{q}r.$$

Důkaz provedeme maticí.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
	p	q	r	$\bar{p}$	$\bar{q}$	$\bar{r}$	$p \equiv q$	$\bar{q} r$	$7 \rightarrow 8$	$q \oplus \bar{r}$	$9 \rightarrow 10$	$\bar{q}r$	$11 \equiv 12$
1	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	1
2	0	0	1	1	1	0	1	0	0	1	1	1	1
3	0	1	0	1	0	1	0	1	1	0	0	0	1
4	0	1	1	1	0	0	0	1	1	0	0	0	1
5	1	0	0	0	1	1	0	1	1	0	0	0	1
6	1	0	1	0	1	0	0	0	1	1	1	1	1
7	1	1	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	1
8	1	1	1	0	0	0	1	1	1	0	0	0	1

Tab. 28

Sl. 13 dokazuje, že původní formule (sl. 11) je ekvivalentní DNF (sl. 12).

b) Máme za úkol převést na konjunktivní normální formu formuli

$$(p \oplus q) \oplus [(q \wedge r) \oplus p]$$

- ba) $(p \oplus q) \oplus [(q \wedge r) \oplus p]$ dle TE (Z 63)
- bb) $\overline{(p \oplus q) \wedge [(q \wedge r) \oplus p]}$ dle De Morgana
- bc) $\overline{p \oplus q} \wedge \overline{(q \wedge r) \oplus p}$ dle Z 5 a TE
- bd) $(p \wedge \overline{q}) \wedge [(q \wedge r) \oplus p]$ dle TE
- be) $(p \wedge \overline{q}) \wedge \overline{(q \wedge r) \wedge \overline{p}}$ dle De Morgana
- bf) $(p \wedge \overline{q}) \wedge \overline{(q \wedge r \wedge \overline{p})}$ dle De Morgana
- bg) $(p \wedge \overline{q}) \wedge (\overline{q} \wedge \overline{r} \wedge p)$
- bh) $(p \wedge \overline{q} \wedge \overline{r} \wedge p) \wedge (\overline{q} \wedge \overline{q} \wedge \overline{r} \wedge p)$ dle Z 9 a Z 21
- bi) $(p \wedge \overline{q} \wedge \overline{r}) \wedge (p \wedge \overline{q} \wedge \overline{r})$ což je KNF dané formule, kterou lze minimalizovat
- bj) $p \wedge \overline{q} \wedge \overline{r}$

Z příkladů vidíme, že není nutno směřovat od začátku transformací k DNF nebo KNF. Při transformacích je vhodné volit optimální postup a výsledek upravit na požadovanou normální formu.

Náš výsledek ai) je disjunktivní NF vyjádříme-li jej $(\overline{q}r \vee \overline{q}r)$. Právě tak je konjunktivní NF, vyjádříme-li jej $(\overline{q} \wedge r)$.

Výsledek bj) lze chápat opět jako konjunkci dvou elementárních disjunkcí $(p \wedge \overline{q} \wedge \overline{r}) \wedge (p \wedge \overline{q} \wedge \overline{r})$ anebo jako disjunkci elementárních konjunkcí $(pp \wedge \overline{q}\overline{q} \wedge \overline{r}\overline{r})$.

V posledních dvou příkladech provedeme transformaci na normální formu formulí

c) $\overline{p} \oplus (p \oplus q)$

$$\text{d)} \quad \overline{[(p \oplus q) \oplus \bar{p}] \oplus q}$$

$$\text{ca)} \quad \bar{p} \oplus (p \oplus q) \quad \text{dle TE}$$

$$\text{cb)} \quad p \oplus (p \oplus q) \quad \text{dle TE}$$

$$\text{cc)} \quad p \oplus \bar{p} \oplus q \quad \text{dle Z 56}$$

$$\text{cd)} \quad 1 \oplus q \quad \text{dle Z 52}$$

$$\text{ce)} \quad \underline{1} \quad \text{tautologie}$$

$$\text{da)} \quad \overline{[(p \oplus q) \oplus \bar{p}] \oplus q} \quad \text{dle TE}$$

$$\text{db)} \quad [(p \oplus q) \oplus \bar{p}] \oplus \bar{q} \quad \text{dle TE}$$

$$\text{dc)} \quad [(\bar{p} \oplus q) \oplus \bar{p}] \oplus \bar{q} \quad \text{dle Z 28}$$

$$\text{dd)} \quad [p \bar{p} \oplus p q] \oplus \bar{q} \quad \text{dle Z 28}$$

$$\text{de)} \quad p \bar{p} \bar{q} \oplus p q \bar{q} \quad \text{dle Z 55 a Z 53}$$

$$0 \oplus 0$$

$$\text{df)} \quad \underline{0} \quad \text{kontradikce}$$

Dospějeme-li při transformaci na NF ke konstantě 1, jde o tautologii. Konstanta 0 znamená kontradikci.

Převody na normální formu lze tedy zjišťovat stejně jako maticí, jde-li u dané formule o tautologii, kontradikci či formuli splnitelnou.

Úplné disjunktivní a konjunktivní normální formy (Dále ÚDNF a ÚKNF)

Úplná normální forma se od normální formy liší tím, že všechny elementární konjunkce (jde-li o ÚDNF) nebo elementární disjunkce (jde-li o ÚKNF) mají *shodnou délku*, což znamená, že každý elementární člen obsahuje všechny proměnné (argumenty) nebo jejich negace, které figurují ve výchozí formuli.

Úplná normální forma formule F , která obsahuje argumenty $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$ je normální forma, jejíž každá elementární konjunkce (jde-li o ÚDNF) nebo elementární disjunkce (jde-li o ÚKNF) splňuje podmínky:

- 1) obsahuje elementární konjunkce (resp. disjunkce), z nichž každá obsahuje právě n proměnných s negačním pruhem nebo bez něj,
- 2) žádná elementární konjunkce (resp. disjunkce) neobsahuje kteroukoli proměnnou více než jednou,
- 3) žádná elementární konjunkce (resp. disjunkce) neobsahuje současně proměnnou a její negaci.

Příklad. Je dána formule F , která obsahuje tři proměnné p, q, r .

Elementární konjunkce: $pqr, p\bar{q}r$ apod.

Elementární disjunkce: $(\bar{p} \vee q \vee r), (\bar{p} \vee \bar{q} \vee r)$ apod.

Chybně utvořené elementární konjunkce a disjunkce

$$ppqr, pqr\bar{q}, (\bar{p} \vee q \vee r \vee q), (\bar{p} \vee q \vee \bar{r} \vee p).$$

Transformace formulí na ÚDNF nebo ÚKNF je možno provádět dvojím způsobem.

- 1) Danou formuli transformujeme na normální formu a jednotlivé elementy (elementární konjunkce nebo disjunkce) upravíme na shodnou délku opakováním využíváním zákona Z 45
 $p \approx p \vee p \vee p \vee \dots$ nebo jeho varianty $p \approx (p \vee q) \wedge (p \vee \bar{q})$ Z 46.
Tento zákon, který jsme využívali při minimalizacích, nyní užíváme v obráceném sledu.

Příklad.

- a) V našem příkladu jsme formuli $[(p \rightsquigarrow q) \sqcup (\bar{q}|r)] \sqcup (q \sqcap \bar{r})$ transformovali na normální formu $\bar{q}r$.

Aby se z ní stala úplná disjunktivní normální forma, chybí v elementární konjunkci proměnná p .

1. aa $\bar{q}r$ dle Z 45 | substitucí $p|\bar{q}r$, $q|p$
1. ab $\bar{q}rp \sqcup \bar{q}r\bar{p}$ dle Z 21
1. ac $p\bar{q}r \sqcup \bar{p}\bar{q}r$ ÚDNF dané formule

- b) Mějme formuli F , kterou jsme transformovali na KNF

$$(\bar{p} \sqcup q) \sqcap (p \sqcup q \sqcup r) \sqcap (\bar{q} \sqcup \bar{r}).$$

Provedeme úpravu na ÚKNF.

1. ba $(\bar{p} \sqcup q) \sqcap (p \sqcup q \sqcup r) \sqcap (\bar{q} \sqcup \bar{r})$ dle var. Z 45 subst. $q|r$.
1. bb $(\bar{p} \sqcup q \sqcup r) \sqcap (\bar{p} \sqcup q \sqcup \bar{r}) \sqcap (p \sqcup q \sqcup r) \sqcap (\bar{q} \sqcup \bar{r})$ opět Z 45, jímž rozvineme .
1. bc $(p \sqcup q \sqcup r) \sqcap (p \sqcup \bar{q} \sqcup \bar{r}) \sqcap (\bar{p} \sqcup q \sqcup r) \sqcap (\bar{p} \sqcup q \sqcup \bar{r}) \sqcap (\bar{p} \sqcup \bar{q} \sqcup \bar{r})$

- 2) Transformace formule na ÚDNF pomocí tabulky. (Viz tab. 29.)

Nejde o nic jiného, než o základní tabulku pro n argumentů (v naší tab. jde o 3 argumenty p, q, r), kdy hodnoty 0, 1 nahradíme proměnnými nebo jejich negacemi a vytvoříme tak trojice, které chápeme jako elementární konjunkce (pak je spojíme funktorem disjunkce) nebo elementární disjunkce (pak je spojíme funktorem konjunkce).

	1	2	3	4	5
	p	q	r	konjunkce	disjunkce
1	0	0	0	$\bar{p}\bar{q}\bar{r}$	$(p \sqcup q \sqcup r)$

2	0	0	1	$\bar{p}\bar{q}r$	$(p \vee q \vee \bar{r})$
3	0	1	0	$\bar{p}q\bar{r}$	$(p \vee \bar{q} \vee \bar{r})$
4	0	1	1	$\bar{p}qr$	$(p \vee \bar{q} \vee r)$
5	1	0	0	$p\bar{q}\bar{r}$	$(\bar{p} \vee q \vee \bar{r})$
6	1	0	1	$p\bar{q}r$	$(\bar{p} \vee q \vee r)$
7	1	1	0	$pq\bar{r}$	$(\bar{p} \vee \bar{q} \vee \bar{r})$
8	1	1	1	pqr	$(\bar{p} \vee \bar{q} \vee r)$

Tab. 29

Dodržujeme při tom následující zásady:

- I. Vytváříme-li elementární konjunkce, potom je-li v řádce pod příslušnou proměnnou hodnotou 0, uvedeme proměnnou s negačním pruhem. Je-li hodnota 1, uvedeme proměnnou bez negačního pruhu.

Příklad: konjunkce pro 3. řádku $\bar{p}q\bar{r}$.

- II. Vytváříme-li elementární disjunkce, je postup opačný. Tzn., kde je v řádce pod příslušnou proměnnou hodnota 1, je proměnná s negačním pruhem. Je-li hodnota 0, uvedeme proměnnou bez negačního pruhu.

Příklad: disjunkce pro 3. řádku $(p \vee \bar{q} \vee \bar{r})$.

Čtenář si jistě povšimne vztahu mezi oběma příklady.

$$\bar{p}q\bar{r} \Leftrightarrow (p \vee \bar{q} \vee \bar{r}) \quad \text{dle Z 28}$$

$$\bar{p}q\bar{r}p \vee \bar{p}q\bar{r}\bar{q} \vee \bar{p}q\bar{r}r \quad \text{dle Z 55}$$

$$0 \vee 0 \vee 0$$

$$\underline{0}$$

kontradikce

$$\bar{p}q\bar{r} \rightarrow (p \rightarrow \bar{q} \rightarrow r)$$

dle Z 49

$$p \rightarrow q \rightarrow \bar{q} \rightarrow r$$

opět Z 49

$$p \rightarrow \bar{q} \rightarrow \bar{r} \rightarrow r$$

dle Z 56

$$p \rightarrow \bar{q} \rightarrow 1$$

dle Z 52

$$1$$

tautologie

Postup při tvorbě ÚDNF je následující.

1. Danou formuli vyhodnotíme maticí.
2. Ve sloupci výsledných hodnot vybereme ty řádky, kde je pravdivostní hodnota 1.
3. Ke každému takovému řádku sestojíme elementární konjunkci způsobem popsáným v zásadě I u tab.
4. Tyto elementární konjunkce spojíme funktorem disjunkce.
5. Výsledkem je ÚDNF dané formule.

Příklad. Převeďme formuli $F_1 = (p \rightarrow q) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (\bar{q} \rightarrow r))$ na ÚDNF pomocí matice (viz tab. 30).

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	p	q	r	$\bar{q}$	$\bar{r}$	$p \rightarrow q$	$p \rightarrow q$	$\bar{q} \rightarrow r$	$7 \rightarrow 8$	$6 \vee 9$
1	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1
2	0	0	1	1	0	1	1	0	0	1
3	0	1	0	0	1	0	1	0	0	0
4	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0
5	1	0	0	1	1	0	0	1	1	1
6	1	0	1	1	0	0	0	0	1	1
7	1	1	0	0	1	0	1	0	0	0
8	1	1	1	0	0	0	1	0	0	0

Tab. 30

Výsledná hodnota 1 je v řádcích 1, 2, 5 a 6. Pro ni utvoříme konjunkce $\bar{p}\bar{q}\bar{r}$, $\bar{p}\bar{q}r$, $p\bar{q}\bar{r}$ a $p\bar{q}r$. Tyto elementární konjunkce spojíme funktory disjunkce a máme ÚDNF formule F_1 :

$$\bar{p}\bar{q}\bar{r} \vee \bar{p}\bar{q}r \vee \bar{p}q\bar{r} \vee \bar{p}qr.$$

q

Postup při tvorbě ÚKNF je následující.

1. Danou formuli vyhodnotíme maticí.
2. Ve sloupci výsledných hodnot vybereme ty řádky, kde je pravdivostní hodnota 0.
3. Ke každému takovému řádku sestojíme elementární disjunkci způsobem popsáným v zásadě II, u tab. 29, str. 84.
4. Tyto elementární disjunkce spojíme funktorem konjunkce.
5. Výsledkem je ÚKNF dané formule.

Příklad. Převeďme tutéž formuli

$$F_1 = (p \sqcap q) \sqcap [(p \sqcup q) \sqcup (\bar{q} \sqcup \bar{r})]$$

na ÚKNF pomocí matice (viz tab. 30).

Výsledná hodnota 0 je v řádcích 3, 4, 7 a 8. Pro ně utvoříme disjunkce a spojíme je funktory konjunkce. Získáme

$$(p \sqcup \bar{q} \sqcup \bar{r}) \sqcup (p \sqcup \bar{q} \sqcup \bar{r}) \sqcup (\bar{p} \sqcup \bar{q} \sqcup \bar{r}) \sqcup (\bar{p} \sqcup \bar{q} \sqcup \bar{r})$$

Protože jde o tutéž formuli, jsou výsledné úplné normální formy ekvivalence. Lze se o tom snadno přesvědčit opět zákonem Z 45 a příslušnými minimalizačními kroky.

$$(\bar{p}\bar{q}\bar{r} \vee \bar{p}\bar{q}r \vee \bar{p}q\bar{r} \vee \bar{p}qr) \approx [(p \vee \bar{q} \vee \bar{r}) \vee (p \vee \bar{q} \vee \bar{r}) \vee (\bar{p} \vee \bar{q} \vee \bar{r}) \vee (\bar{p} \vee \bar{q} \vee \bar{r})]$$

$$(\bar{p}\bar{q} \vee p\bar{q}) \approx [(\bar{p} \vee \bar{q}) \vee (\bar{p} \vee \bar{q})]$$

$$\bar{q} \approx \bar{q}$$

Na závěr výkladu výrokového kalkulu je možno objasnit vztahy mezi soudy SAP, SIP, SEP a SOP uvedené při výkladu logického čtverce v předchozích kapitolách. Soudy členěné dle kvantity

(obecné a částečné) lze vyjádřit funktorem “ $\wedge$ ” resp. “ $\vee$ ”, soudy členěné dle kvality užitím negace.

Předpokládejme, že jsme definovali množinu, která má právě dva prvky: p, q .

Potom soud SAP lze vyjádřit $p \wedge q$ (všechny mají)

SIP “ “ $p \vee q$ (některé mají)

SEP “ “ $\bar{p} \wedge \bar{q}$ (všechny nemají)

SOP “ “ $\bar{p} \vee \bar{q}$ (některé nemají)

Nejde o nic jiného než o vyjádření kvantifikovaných výrazů v rozepsané formě viz str. 93-94.

Vztahy kontradikce, kontrárnosti, subkontrárnosti a subalternosti potom přesně ilustruje následující tabulka (viz tab. č)

		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
		SAP	SOP	SEP	SIP	SAP	SEP	SIP	SOP	SAP	SIP	SEP	SOP
	$p \quad q \quad \bar{p} \quad \bar{q}$	$p \wedge q$	$\bar{p} \vee \bar{q}$	$\bar{p} \wedge \bar{q}$	$p \vee q$	$p \wedge q$	$\bar{p} \wedge \bar{q}$	$p \vee q$	$\bar{p} \vee \bar{q}$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$\bar{p} \vee q$	$\bar{p} \vee \bar{q}$
1	0 0 1 1	0	1	1	0	0	1	0	1	0	0	1	1
2	0 1 1 0	0	1	0	1	0	0	1	1	0	1	0	1
3	1 0 0 1	0	1	0	1	0	0	1	1	0	1	0	1
4	1 1 0 0	1	0	0	1	1	0	1	0	1	1	0	0
		kontra-diktorické		kontra-diktorické		kontrární		subkontrární		subalterní		subalterní	

Tab. č.

Dalším způsobem, jak lze tyto vztahy prokázat, je metoda zjednodušování (transformace na disjunktivní normální formu).

Příklad.

Dle zákona vyloučeného třetího ($p \vee \bar{p}$) je disjunkce formule s její negací vždy pravdivá (1). Potom SAP v disjunkci s SOP (v terminologii výrokového kalkulu ($p \wedge q \vee (\bar{p} \wedge \bar{q}) = 1$).

$$pq \vee \bar{p} \vee \bar{q} = 1$$

$$(p \wedge q) \vee \bar{q} = 1 \text{ dle Z 49}$$

$$1 \vee \bar{q} = 1 \text{ dle Z 2}$$

$$1 = 1 \text{ dle Z 52}$$

Obdobně SIP nebo SEP.

Subalternost:

SAP $\supset$ SIP v terminologii výrokového kalkulu $(p \supset q) \supset (p \supset q) = 1$.

$$\overline{(p \supset q)} \supset (p \supset q) = 1$$

$$\bar{p} \supset q \supset p \supset q = 1$$

$$(\bar{p} \supset p) \supset (\bar{q} \supset q) = 1$$

$$1 \supset 1 = 1$$

$$1 = 1$$

Obdobně SEP $\supset$ SOP.

Kontrárnost a subkontrárnost.

Z matice vyplývá, že v prvním a čtvrtém řádku jsou shodné s kontradikcí, ale mohou být oba nepravdivé (kontrární) nebo pravdivé (subkontrární).